信息安全数学基础

韩 琦

计算机科学与技术学院

Overview

1 组合数学

Detailed overview

1. 组合数学
   - 概述
   - 先修课程知识点回顾
     - 排列与组合
     - 鸽巢原理
     - 容斥原理
     - 母函数
   - 递推关系
   - 区组设计

概述

组合数学是当代数学的一个重要分支，是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门科学。组合数学的基本问题是：存在问题、计数问题和优化问题。存在问题是研究一种特定种类的排列是否存在的问题；技术问题研究存在多少中排列；优化问题则研究在各种可能的排列中，选择对于某个标准来说最好的排列。

本章在先修课程的基础上，简要回顾排列组合、容斥原理等基本概念，重点学习组合数学中两个比较深入的主题：递推关系和区组设计。本章内容共有4课时。

概述

组合数学是当代数学的一个重要分支，是研究离散结构的存在、计数、分析和优化等问题的一门科学。组合数学的基本问题是：存在问题、计数问题和优化问题。存在问题是研究一种特定种类的排列是否存在的问题；技术问题研究存在多少中排列；优化问题则研究在各种可能的排列中，选择对于某个标准来说最好的排列。

本章在先修课程的基础上，简要回顾排列组合、容斥原理等基本概念，重点学习组合数学中两个比较深入的主题：递推关系和区组设计。本章内容共有4课时。

Detailed overview

1. 组合数学
   - 概述
   - 先修课程知识点回顾
     - 排列与组合
     - 鸽巢原理
     - 容斥原理
     - 母函数
   - 递推关系
   - 区组设计

加法原理和乘法原理

在各种计数问题中经常用到的两个基本法则：加法法则和乘法法则(也常被称为“加法原理”和“乘法原理”)：

- 加法法则： 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A或事件B”有$m+n$种产生方式。
- 乘法法则： 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A与事件B”有$m \times n$种产生方式。

加法原理和乘法原理

在各种计数问题中经常用到的两个基本法则：加法法则和乘法法则(也常被称为“加法原理”和“乘法原理”)：

- **加法法则：** 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A**或**事件B”有$m+n$种产生方式。
- **乘法法则：** 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A**与**事件B”有$m \times n$种产生方式。

加法原理和乘法原理

在各种计数问题中经常用到的两个基本法则：加法法则和乘法法则(也常被称为“加法原理”和“乘法原理”)：

- **加法法则**： 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A**或**事件B”有$m+n$种产生方式。
- **乘法法则**： 设A和B是两类不同的事件，若事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则“事件A**与**事件B”有$m \times n$种产生方式。

排列

定义

*从n个不同的元素中取出r个，将这r个元素按次序排列所得到的结果称为这n个元素的一个$r-$**排列**，所有$r-$排列的个数记为$P(n,r)$。$n-$排列又称为**全排列**。*

由定义显见：

1. $P(n,r)=0$，$(r>n)$；
2. $P(n,1)=n$，$(n\geq 1)$。

计算排列的个数：

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

如果$r=n$，则称为全排列，有：$P(n,n)=n!$。

排列

定义

*从n个不同的元素中取出r个，将这r个元素按次序排列所得到的结果称为这n个元素的一个$r-$**排列**，所有$r-$排列的个数记为$P(n,r)$。$n-$排列又称为**全排列**。*

由定义显见：

1. $P(n,r) = 0, \quad (r > n)$；
2. $P(n,1) = n, \quad (n \geq 1)$。

计算排列的个数：

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

如果$r = n$，则称为全排列，有：$P(n,n) = n!$。

排列

定义

*从n个不同的元素中取出r个，将这r个元素按次序排列所得到的结果称为这n个元素的一个$r-$**排列**，所有$r-$排列的个数记为$P(n,r)$。$n-$排列又称为**全排列**。*

由定义显见：

1. $P(n,r)=0,\quad (r>n)$；
2. $P(n,1)=n,\quad (n\geq 1)$。

计算排列的个数：

$$P(n,r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

如果$r=n$，则称为全排列，有：$P(n,n)=n!$。

组合

定义

*从n个不同的元素中取出r个，不考虑次序取出r个所得到的结果，称为这n个元素的一个$r-$**组合**，所有$r-$组合的个数记为$C(n,r)$或$\binom{n}{r}$。*

可以这样做出n个不同元素的所有$r-$排列：先做出这n个元素的所有$r-$组合，然后对每一个$r-$组合做出他的全部$r-$ 排列，根据乘法法则：

$$P(n,r) = C(n,r)P(r,r)$$

即：

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

组合

定义

*从n个不同的元素中取出r个，不考虑次序取出r个所得到的结果，称为这n个元素的一个$r-$**组合**，所有$r-$组合的个数记为$C(n,r)$或$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$。*

可以这样做出n个不同元素的所有$r-$排列：先做出这n个元素的所有$r-$组合，然后对每一个$r-$组合做出他的全部$r-$ 排列，根据乘法法则：

$$P(n,r) = C(n,r)P(r,r)$$

即：

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

可重的排列、组合

定理

n个元素的可重$r-$排列的个数为n^r。

进而有：

定理

在k个元素$a_1, a_2, \cdots, a_k$的可重$n-$排列中，若$a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$出现的次数为$n_i, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$，则所有这样可重$n-$排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

可重$r-$组合：

定理

n个元素的可重$r-$组合的个数为$C(n + r - 1, r)$。

可重的排列、组合

定理

n个元素的可重$r-$排列的个数为n^r。

进而有：

定理

在k个元素$a_1, a_2, \cdots, a_k$的可重$n-$排列中，若$a_i (i = 1, 2, \cdots, k)$出现的次数为$n_i, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$，则所有这样可重$n-$排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

可重$r-$组合：

定理

n个元素的可重$r-$组合的个数为$C(n+r-1, r)$。

可重的排列、组合

定理

n个元素的可重$r-$排列的个数为n^r。

进而有：

定理

在k个元素$a_1, a_2, \cdots, a_k$的可重$n-$排列中，若$a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$出现的次数为$n_i, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$，则所有这样可重$n-$排列的个数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

可重$r-$组合：

定理

n个元素的可重$r-$组合的个数为$C(n + r - 1, r)$。

鸽巢原理

鸽巢原理有两种表述形式：简单形式和加强形式。

定理（鸽巢原理的简单形式）

如果把$n+1$个物品放入n个盒子里，那么至少有一个盒子里包含两个或两个以上的物品。

定理（鸽巢原理的加强形式）

如果把m个物品放入k个盒子里，那么至少有一个盒子的物品数超过

$$\left\lfloor \frac{m-1}{k} \right\rfloor$$

其中$\lfloor\rfloor$表示向下取整。
鸽巢原理给出了多个物体在多个容器中上限的下界。

鸽巢原理

鸽巢原理有两种表述形式：简单形式和加强形式。

定理（鸽巢原理的简单形式）

如果把$n+1$个物品放入n个盒子里，那么至少有一个盒子里包含两个或两个以上的物品。

定理（鸽巢原理的加强形式）

如果把m个物品放入k个盒子里，那么至少有一个盒子的物品数超过

$$\lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$$

其中$\lfloor\rfloor$表示向下取整。

鸽巢原理给出了多个物体在多个容器中上限的下界。

鸽巢原理

鸽巢原理有两种表述形式：简单形式和加强形式。

定理（鸽巢原理的简单形式）

如果把$n+1$个物品放入n个盒子里，那么至少有一个盒子里包含两个或两个以上的物品。

定理（鸽巢原理的加强形式）

如果把m个物品放入k个盒子里，那么至少有一个盒子的物品数超过

$$\lfloor \frac{m-1}{k} \rfloor$$

其中$\lfloor\rfloor$表示向下取整。
鸽巢原理给出了多个物体在多个容器中上限的下界。

容斥原理

定理

设A、B为有限集合，则$|A\bigcup B| = |A| + |B| - |A\bigcap B|$

其中$|\cdot|$表示集合中元素的个数。

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限集合，则

$$
\begin{aligned}
|A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\bigcap A_j| \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k| \\
&- \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n|
\end{aligned}
$$

容斥原理

定理

设A、B为有限集合，则$|A\bigcup B| = |A| + |B| - |A\bigcap B|$

其中$|\cdot|$表示集合中元素的个数。

定理

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是有限集合，则

$$\begin{aligned}|A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\bigcap A_j| \\ &+ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k| \\ &- \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n|\end{aligned}$$

错排

定义

考虑$1, 2, \cdots, n$的排列，若在一个排列$i_1, i_2, \cdots, i_n$中，有$i_j \neq j\ (1 \leq j \leq n)$，则称这个排列为一个错排。

若记$1, 2, \cdots, n$的错排个数为D_n，则关于错排的个数有如下定理：

定理

对任意正整数n，有

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

错排

定义

考虑$1,2,\cdots,n$*的排列，若在一个排列*$i_1,i_2,\cdots,i_n$*中，有*$i_j \neq j\ (1 \leq j \leq n)$*，则称这个排列为一个错排。*

若记$1,2,\cdots,n$的错排个数为D_n，则关于错排的个数有如下定理：

定理

对任意正整数n*，有*

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

母函数

母函数方法是一种非常有用的数学方法，它是求解计数问题的一个强有力的工具，其中心思想是：将一个有限或无限序列

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

与一个函数项级数$G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$联系起来，从而可以通过用解析的方法研究$G(x)$得到序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的一些性质。其中，$u_0(x), u_1(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是一个$x$函数的序列。
最简单的函数序列为$1, x, \cdots, x^n, \cdots$，这时$G(x)$称为与序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$对应的母函数。另一类函数序列$1, \frac{x}{1!}, \cdots, \frac{x^n}{n!}, \cdots$，这时称$G(x)$为与序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$对应的指数型母函数。

母函数(续)

定义

对于序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$称函数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$的母函数。

特别的，有限序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$可以看成是无穷序列：

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, \cdots$$

其母函数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

是一个多项式。

母函数(续)

定义

对于序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$*称函数*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

为序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$*的母函数。*

特别的，有限序列$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$可以看成是无穷序列：

$$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, 0, \cdots$$

其母函数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

是一个多项式。

母函数(续)

下面给出几种常见的母函数：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + \cdots$， n 为正整数；
4. 牛顿二项式公式：$(1 \pm x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} (\pm x)^k$， a 为实数。

母函数(续)

下面给出几种常见的母函数：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + \cdots$，$n$ 为正整数；
4. 牛顿二项式公式：$(1 \pm x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} (\pm x)^k$，$a$ 为实数。

母函数(续)

下面给出几种常见的母函数：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + \cdots$，$n$ 为正整数；
4. 牛顿二项式公式：$(1 \pm x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} (\pm x)^k$，$a$ 为实数。

母函数(续)

下面给出几种常见的母函数：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + \cdots$，$n$ 为正整数；
4. 牛顿二项式公式：$(1 \pm x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a \\ k \end{pmatrix} (\pm x)^k$，$a$ 为实数。

母函数(续)

下面给出几种常见的母函数：

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$
2. $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}x^k + \cdots$，$n$ 为正整数；
4. 牛顿二项式公式：$(1 \pm x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} (\pm x)^k$，$a$ 为实数。

Detailed overview

1. 组合数学
   - 概述
   - 先修课程知识点回顾
     - 排列与组合
     - 鸽巢原理
     - 容斥原理
     - 母函数
   - 递推关系
   - 区组设计

递推关系

定义

给定一个数的序列$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，若存在整数$n_0$，使当$n \geq n_0$时，可以用等号（或者大于号、小于号）将$a_n$与其前面的某些项$a_i$ $(0 \leq i \leq n)$联系起来，这样的式子就叫做递推关系。

下面给出一种更加严谨的定义：

定义

设k是给定的正整数，如果序列$\{a_n\}$满足

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n), \; C_k \neq 0 \qquad (1.1)$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_k$是常数，则称该方程为序列$\{a_n\}$的k阶常系数线性递推关系。若$f(n) = 0$，则称为齐次的。

递推关系

定义

给定一个数的序列$a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，若存在整数$n_0$，使当$n \geq n_0$时，可以用等号（或者大于号、小于号）将$a_n$与其前面的某些项$a_i$ $(0 \leq i \leq n)$联系起来，这样的式子就叫做递推关系。

下面给出一种更加严谨的定义：

定义

设k是给定的正整数，如果序列$\{a_n\}$满足

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = f(n),\ C_k \neq 0 \tag{1.1}$$

其中$C_1, C_2, \cdots, C_k$是常数，则称该方程为序列$\{a_n\}$的k阶常系数线性递推关系。若$f(n) = 0$，则称为齐次的。

递推关系—举例

若有一个序列$\{a_n\}$代入递推关系式1.1，使得其对任何$n \geq k$都成立，则称该序列为递推关系式1.1的一个解。

递推关系的例子—Hanoi塔游戏：

例

n个圆盘依其半径大小，从下而上套在A柱上，每次只允许取一个移到柱B或C上，而且不允许大盘放在小盘上，若要把柱A上的n个盘移到C柱上，并保持原来的顺序，问至少需要移动多少次？

递推关系—举例

若有一个序列$\{a_n\}$代入递推关系式1.1，使得其对任何$n \geq k$都成立，则称该序列为递推关系式1.1的一个解。

递推关系的例子—Hanoi塔游戏：

例

n个圆盘依其半径大小，从下而上套在A柱上，每次只允许取一个移到柱B或C上，而且不允许大盘放在小盘上，若要把柱A上的n个盘移到C柱上，并保持原来的顺序，问至少需要移动多少次？

递推关系—举例

解： 记a_n为n个圆盘从A柱搬到C柱所需的最小次数，则整个移动过程分为三个阶段：

1. 把A上面的$n-1$个圆盘经过C转移到B，移动次数为a_{n-1}；
2. 把A下面的一个圆盘移到C上，移动次数为1；
3. 把B上的$n-1$个圆盘通过A转移到C上，移动次数为a_{n-1}。

根据加法法则，可以得到如下递推关系：

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

显然，$a_1 = 1$，所以有如下带初值的递推关系：

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

□

递推关系式及特征方程

定义

方程$x^k + C_1x^{k-1} + \cdots + C_{k-1}x + C_k = 0$称为递推关系式1.1的特征方程，其根称为递推关系式1.1的特征根。

下面讨论k阶常系数线性齐次递推关系式1.2的求解：

$$a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0 \tag{1.2}$$

引理

设a为非零复数，则$a_n = a^n$是递推关系式1.2的一个解当且仅当a是它的特征根。

递推关系式及特征方程

定义

方程$x^k + C_1x^{k-1} + \cdots + C_{k-1}x + C_k = 0$称为递推关系式1.1的特征方程，其根称为递推关系式1.1的特征根。

下面讨论k阶常系数线性齐次递推关系式1.2的求解：

$$a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = 0 \tag{1.2}$$

引理

设a为非零复数，则$a_n = a^n$是递推关系式1.2的一个解当且仅当a是它的特征根。

递推关系式及特征方程

定义

方程$x^k + C_1 x^{k-1} + \cdots + C_{k-1}x + C_k = 0$称为递推关系式1.1的特征方程，其根称为递推关系式1.1的特征根。

下面讨论k阶常系数线性齐次递推关系式1.2的求解：

$$a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_k a_{n-k} = 0 \quad (1.2)$$

引理

设a为非零复数，则$a_n = a^n$是递推关系式1.2的一个解当且仅当a是它的特征根。

通解的定义

引理

若a、b_n都是递推关系式1.2的解，那么$A_1a_n+A_2b_n$也是递推关系式1.2的解。

定义

设$a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^t$是递推关系式1.2的$t$个不同的解，若对递推关系式1.2的每一个解$a_n$，都存在常数$A'_1, A'_2, \cdots, A'_t$，使得

$$a_n = A'_1a_n^1 + A'_2a_n^2 + \cdots + A'_ta_n^t$$

成立，则称$A_1a_n^1 + A_2a_n^2 + \cdots + A_ta_n^t$为递推关系式1.2的通解，其中$A_1, A_2, \cdots, A_t$为任意常数。

需要注意的是：上面的A'_i和A_i是两组不同的参数。

通解的定义

引理

若a、b_n都是递推关系式1.2的解，那么$A_1a_n + A_2b_n$也是递推关系式1.2的解。

定义

设$a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^t$是递推关系式1.2的$t$个不同的解，若对递推关系式1.2的每一个解$a_n$，都存在常数$A'_1, A'_2, \cdots, A'_t$，使得

$$a_n = A'_1a_n^1 + A'_2a_n^2 + \cdots + A'_ta_n^t$$

成立，则称$A_1a_n^1 + A_2a_n^2 + \cdots + A_ta_n^t$为递推关系式1.2的通解，其中$A_1, A_2, \cdots, A_t$为任意常数。

需要注意的是：上面的A'_i和A_i是两组不同的参数。

通解的构造

定理

设$a_1, a_2, \cdots, a_k$是递推关系式1.2的k个不同的特征根，那么

$$a_n = A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + \cdots + A_k a_k^n$$

是递推关系式1.2的通解。

如果特征根是r重特征根，则：

定理

假定a是递推关系式1.2的r重特征根，则$a^n, na^n, n^2a^n, \cdots, n^{r-1}a^n$都是递推关系式1.2的解。

通解的构造

定理

设$a_1, a_2, \cdots, a_k$是递推关系式1.2的k个不同的特征根，那么

$$a_n = A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + \cdots + A_k a_k^n$$

是递推关系式1.2的通解。

如果特征根是r重特征根，则：

定理

假定a是递推关系式1.2的r重特征根，则$a^n, na^n, n^2 a^n, \cdots, n^{r-1} a^n$都是递推关系式1.2的解。

通解的构造(续)

更一般地，有如下定理：

定理

设$a_1, a_2, \cdots, a_t$是递推关系式1.2的全部不同的特征根，其重数分别为$e_1, e_2, \cdots, e_t (e_1 + e_2 + \cdots + e_t = k)$，那么递推关系式1.2的通解为：

$$a_n = a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^t$$

其中，$a_n^i = (A_{i_1} + A_{i_2} n + A_{i_3} n^2 + \cdots + A_{i_{e_i}} n^{e_i - 1}) a_i^n$

关于k阶常系数线性非齐次递推关系式1.1的求解方法，有下面的定理：

定理

k阶常系数线性非齐次递推关系式1.1的通解是递推关系式1.1的特解加上其相应的齐次递推关系式1.2的通解。

通解的构造(续)

更一般地，有如下定理：

定理

设$a_1, a_2, \cdots, a_t$是递推关系式1.2的全部不同的特征根，其重数分别为$e_1, e_2, \cdots, e_t (e_1 + e_2 + \cdots + e_t = k)$，那么递推关系式1.2的通解为：

$$a_n = a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^t$$

其中，$a_n^i = (A_{i_1} + A_{i_2} n + A_{i_3} n^2 + \cdots + A_{i_{e_i}} n^{e_i - 1}) a_i^n$

关于k阶常系数线性非齐次递推关系式1.1的求解方法，有下面的定理：

定理

k阶常系数线性非齐次递推关系式1.1的通解是递推关系式1.1的特解加上其相应的齐次递推关系式1.2的通解。

谢谢！

hanqi_xf@hit.edu.cn